受験番号								氏名	

令和３年度前期日程試験解答用紙（数学）

【 解 答 例 】

〔注意事項〕

・監督者の指示があるまで解答用紙を開いてはいけません。

・全てのページの所定欄に受験番号、氏名を記入しなさい。

受験番号								氏名	

令和３年度前期日程試験解答用紙（数学）

第１問

(1) ① の判別式を D とし，$D/4>0$ となる k の値の範囲を求める。

$$D/4=k^2-k(2k-2)=-k^2+2k=-k(k-2)$$

より，$D/4>0$ となる k の値の範囲は $0<k<2$ 。

(2) 解の公式より $x=1\pm\sqrt{-1+\frac{2}{k}}$ 。

また，$k=\frac{2}{5}$ のとき $x=-1,\ 3$ 。

$k=1$ のとき $x=0,\ 2$ 。

(3)

$x=1\pm\sqrt{-1+\frac{2}{k}}$ より，2 つの実数解は 1 から等距離にあり，かつ $0<k<2$ において，k が小さくなるにつれて解は 1 から単調に離れていく。したがって，$-1<x\leqq 2$ において，k を 1 からどんどん小さくしていったとき，解が $x=2$ をとるまで実数解は 2 個存在し，そこから解 $x=-1$ をとる前まで実数解は 1 個存在し，それより先では実数解は 0 個。

また，(2) より $k=1$ のとき，$x=2$ をとり，$k=\frac{2}{5}$ のとき $x=-1$ をとる。以上より，$-1<x\leqq 2$ において

- $k=1$ のとき，実数解は 2 個。
- $\frac{2}{5}<k<1$ のとき，実数解は 1 個。
- $0<k\leqq\frac{2}{5}$ のとき，実数解は 0 個。

第１問 得　点	

受験番号							氏名	

令和３年度前期日程試験解答用紙（数学）

第２問

(1) 等式

$$\frac{3}{x^2}+\frac{5}{y^2}=1$$

について，その両辺に x^2y^2 を掛けると，

$$3y^2+5x^2=x^2y^2$$

さて，

$$\begin{aligned}\left(x^2-3\right)\left(y^2-5\right)&=x^2y^2-5x^2-3y^2+15\\&=\left(5x^2+3y^2\right)-5x^2-3y^2+15\\&=15\end{aligned}$$

したがって，$A=15$。

(2) 与えられた条件より x^2 と y^2 は整数なので，x^2-3 と y^2-5 は整数。また，積が 15 となる整数の組は $(1,\ 15)$, $(3,\ 5)$, $(-1,\ -15)$, $(-3,\ -5)$ のみである。したがって，以下の場合が考えられる。

- $x^2-3=1,\ y^2-5=15$ の場合，$x=-2,\ 2,\quad y=-2\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}$。
  したがって，$x<y$ より，$(x,\ y)=\left(-2,\ 2\sqrt{5}\right),\left(2,\ 2\sqrt{5}\right)$。
- $x^2-3=15,\ y^2-5=1$ の場合，$x=-3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\quad y=-\sqrt{6},\sqrt{6}$。
  したがって，$x<y$ より，$(x,\ y)=\left(-3\sqrt{2},\ -\sqrt{6}\right),\left(-3\sqrt{2},\sqrt{6}\right)$。
- $x^2-3=3,\ y^2-5=5$ の場合，$x=-\sqrt{6},\sqrt{6},\quad y=-\sqrt{10},\sqrt{10}$。
  したがって，$x<y$ より，$(x,\ y)=\left(-\sqrt{6},\sqrt{10}\right),\left(\sqrt{6},\sqrt{10}\right)$。
- $x^2-3=5,\ y^2-5=3$ の場合，$x=-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\quad y=-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}$。
  したがって，$x<y$ より， $(x,\ y)=(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$。
- $x^2-3=-1,\ y^2-5=-15$ の場合，$y^2=-10$ なので，解なし。
- $x^2-3=-15,\ y^2-5=-1$ の場合，$x^2=-12$ なので，解なし。
- $x^2-3=-3,\ y^2-5=-5$ の場合，$x=y=0$ なので，$x<y$ より，解なし。
- $x^2-3=-5,\ y^2-5=-3$ の場合，$x^2=-2$ なので，解なし。

よって，

$$\begin{aligned}(x,\ y)=&\left(-2,\ 2\sqrt{5}\right),\left(2,\ 2\sqrt{5}\right),\left(-3\sqrt{2},\ -\sqrt{6}\right),\left(-3\sqrt{2},\sqrt{6}\right),\\&\left(-\sqrt{6},\sqrt{10}\right),\left(\sqrt{6},\sqrt{10}\right),\left(-2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

第２問 得　点	

受験番号							氏名	

令和３年度前期日程試験解答用紙（数学）

第３問

(1) 1 の 3 乗根を x とすると，$x^3 = 1$ すなわち $x^3 - 1 = 0$ が成り立つ。3 次方程式 $x^3 - 1 = 0$ を解くと

$$(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

よって，

$$x = 1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(2) 2 つの放物線で囲まれた部分の面積は，2 つの放物線の交点の x 座標が $x = -1, 2$ なので，

$$S = \int_{-1}^{2} \left\{(4 - x^2) - (x^2 - 2x)\right\} dx = 9$$

である。原点を通る直線 l の傾きを a とする。直線 l と放物線 $y = 4 - x^2$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ における交点の x 座標を p とすると，直線 l が面積 S を二等分するためには，放物線 $y = x^2 - 2x$ と x 軸で囲まれた部分の面積が

$$\int_0^2 \left|x^2 - 2x\right| dx = \frac{4}{3} < \frac{9}{2}$$

であることから，$a > 0$，$0 < p < 2$ であることが必要である。なお，$a = \dfrac{4-p^2}{p}$ である。このとき，2 つの放物線で囲まれた部分のうち，直線 l より下側の部分の面積が $\dfrac{S}{2} = \dfrac{9}{2}$ であればよい。つまり，

$$\int_0^p \left\{ax - (x^2 - 2x)\right\} dx + \int_p^2 \left\{(4 - x^2) - (x^2 - 2x)\right\} dx = \frac{9}{2}$$

$$\frac{p^3}{3} + \frac{ap^2}{2} - 4p + \frac{20}{3} = \frac{9}{2}$$

ここで，$a = \dfrac{4-p^2}{p}$ を代入して整理すると，

$$p^3 + 12p - 13 = 0$$

となる。$p = 1$ は，この 3 次方程式の解であるから，$p^3 + 12p - 13$ は $p - 1$ で割り切れる。したがって，

$$(p-1)(p^2 + p + 13) = 0$$

ところで，2 次方程式 $p^2 + p + 13 = 0$ は実数解をもたないので，直線 l と放物線 $y = 4 - x^2$ の $0 < x < 2$ における交点の x 座標は $p = 1$ である。よって，

$$a = \frac{4-p^2}{p} = 3$$

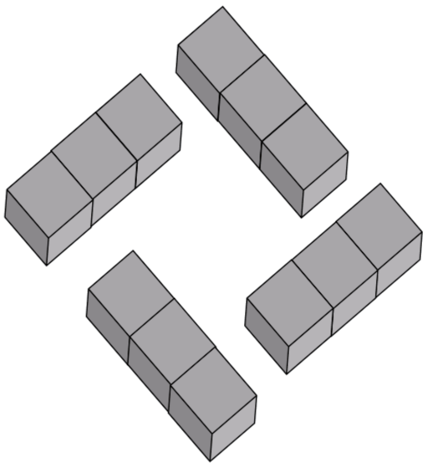
第３問 得　点	

受験番号							氏名	

令和３年度前期日程試験解答用紙（数学）

第４問

(1) $A_n(n \geqq 2)$ は，ブロックが一列に $(n-1)$ 個並んだものを 4 組組み合わせて作ることができる。例えば $n=4$ の場合は, 下図のようにとらえることができる。



A_n を作っているブロックの個数は, $4(n-1)=4n-4\ (n \geqq 2)$

(2) B_1 を作っているブロックの個数は A_1 のブロック数に等しく 1 である。

$n \geqq 2$ の場合は B_n を作っているブロックの個数は,

$$A_1\text{を作っているブロックの個数}+\sum_{i=2}^{n}(A_i\text{を作っているブロックの個数})$$

$= 1+\displaystyle\sum_{i=2}^{n}(4i-4)$

$= 1+\frac{\{(4\times 2-4)+(4\times n-4)\}(n-1)}{2}$

$= 1+\frac{4n(n-1)}{2}$

$= 2n^2-2n+1$

この式に $n=1$ を代入した結果は, B_1 と一致するので，すべての自然数 n について成り立つ。

よって，B_n を作っているブロックの個数は $2n^2-2n+1$

第４問 得　点	