受験番号								氏名	

令和４年度前期日程試験解答用紙（数学）

【 解 答 例 】

〔注意事項〕

・監督者の指示があるまで解答用紙を開いてはいけません。

・全てのページの所定欄に受験番号、氏名を記入しなさい。

受験番号								氏名	

令和４年度前期日程試験解答用紙（数学）

第１問

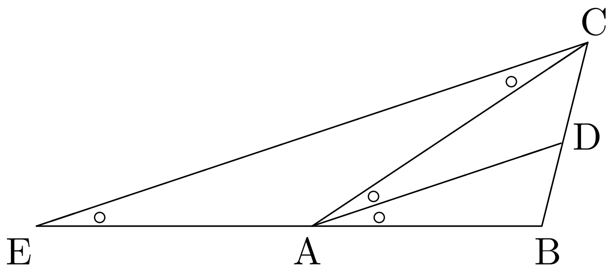
(1) C を通り，AD に平行な直線を引き，辺 BA の延長との交点を E とすると，AD//EC であるから，

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{AEC}\text{（同位角）},\quad \angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{ACE}\text{（錯角）}$$

ここで，AD は $\angle$CAB の二等分線であり，$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{CAD}$ であるから，

$$\angle \mathrm{AEC} = \angle \mathrm{ACE}$$

よって，$\triangle$ACE は二等辺三角形であるから，$\mathrm{AE} = \mathrm{AC}$ ・・・(I)
また，AD//EC であるから，$\mathrm{BA} : \mathrm{AE} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$ ・・・(II)
(I)，(II) より，$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{DC}$ が成り立つ。

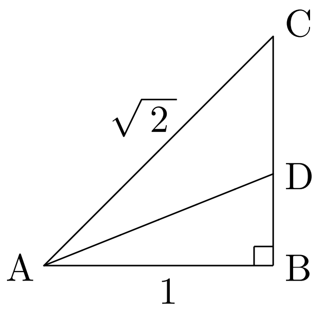


(2) $\triangle$ABC は直角二等辺三角形であるから，AC$=\sqrt{2}$，BC$=1$ である。
(1) から，$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 1 : \sqrt{2}$ であるから，

$$\mathrm{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}-1$$

$\triangle$ABD において，三平方の定理を適用し，

$$\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2 = 1^2 + (\sqrt{2}-1)^2 = 4 - 2\sqrt{2}$$



(3) (2) の図において，AD は $\angle \mathrm{CAB}(= 45^\circ)$ の二等分線であるから，$\angle \mathrm{DAB} = 22.5^\circ$ である。したがって，

$$\begin{aligned}\cos 22.5^\circ = \cos \angle \mathrm{DAB} &= \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}} \\ &= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

第１問 得　点	

受験番号							氏名	

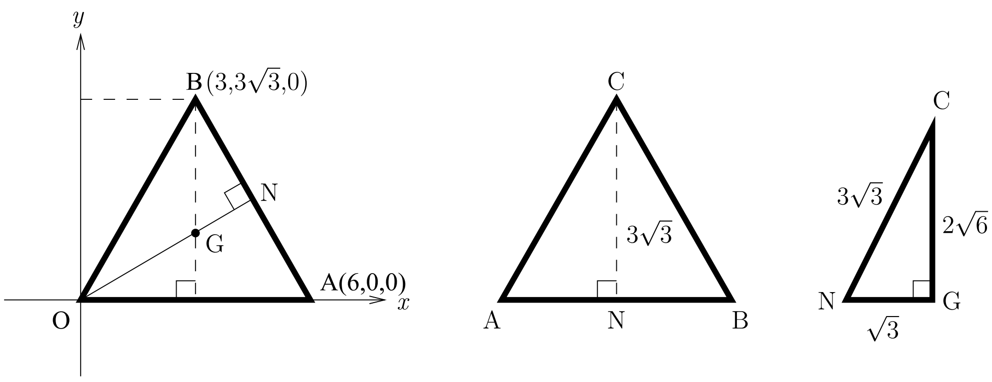
令和4年度前期日程試験解答用紙（数学）

第2問

(1) 頂点 B の y 座標は正負の値を取ることができるので，頂点 B は 2 つ存在し得る。それぞれの頂点 B について $z > 0$ となる頂点 C を 1 つ定めることができるので，条件をみたすような正四面体は 2 つある。

(2) 頂点 B の y 座標が正のとき，図のような正三角形 OAB を考えると，頂点 B の座標は $(3,\ 3\sqrt{3},\ 0)$ であり，同様に，頂点 B の y 座標が負のとき，頂点 B の座標は $(3,\ -3\sqrt{3},\ 0)$ である。また，2 点 O, N を通り平面 $z = 0$ に直交する平面と正四面体 OABC の共有部分について，正三角形 OAB の重心 G を考慮すると，△NGC は直角三角形である。ここで，$\mathrm{NG} = \sqrt{3}$，$\mathrm{NC} = 3\sqrt{3}$ であるから，$\mathrm{CG} = 2\sqrt{6}$ である。したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (3,\ \pm 3\sqrt{3},\ 0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (3,\ \pm\sqrt{3},\ 2\sqrt{6}) \quad \text{(複号同順)}$$



(3)

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\
\overrightarrow{\mathrm{ON}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\
\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)
\end{aligned}
$$

($\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (6,\ 0,\ 0)$、(2) で得られた$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$の成分を使って)

$$= \left(3,\ \pm\sqrt{3},\ -\sqrt{6}\right)$$

(4) 2 つのベクトルの内積が 0 であればよい。複号同順で，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MN}} &= 3 \times 3 + \left(\pm\sqrt{3}\right) \times \left(\pm\sqrt{3}\right) + 2\sqrt{6} \times \left(-\sqrt{6}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって，$\mathrm{OC} \perp \mathrm{MN}$ である。

第2問 得　点	

受験番号								氏名	

令和４年度前期日程試験解答用紙（数学）

第３問

(1) ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$　通り

(2) たとえば上下反転ののちに左右反転を行うと，180°　回転と同じ結果になる。このように３つの操作のうち任意の二つを行えば，他の操作を１回行った場合と同じになる。また同じ操作を２回行えば元に戻る。よって，３つの操作のどれか一つを行った場合だけ考えてよい。
少なくとも一つの隅の区画が塗られているとすると, それを回転か反転で左上に置くことができる。もう一つの塗られた区画は $(6-1)=5$ 通りあるので５グループ。隅が全て塗られていない模様は１種類だけなので１グループ。合計６グループ。

(3) 左右反転，上下反転，180°　回転の全てで自分自身に重なるのは，隅が１つも塗られていない模様のみ。

グループの要素数が１なので確率は $\frac{1}{15}$。

第３問 得　点	

受験番号								氏名	

令和４年度前期日程試験解答用紙（数学）

第４問

(1) $a=0$ のとき,

$$f(x)=b^2+1+2b\cos x$$

なので，最大値，最小値はそれぞれ $x=0$ と $x=\pi/2$ のときで,

$$f(0)=b^2+2b+1, \qquad f(\frac{\pi}{2})=b^2+1$$

をとる。

(2) 三角関数の合成より

$$\begin{aligned} f(x)&=a^2+2a\sin x+\sin^2 x+b^2+2b\cos x+\cos^2 x \\ &=a^2+b^2+1+2\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし， α は

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{(A)}$$

を満たす実数である。特に，$b>0$ であることから $0<\alpha<\pi$ としてよい。

- $a \geqq 0$ の場合，(A) より $0<\alpha\leqq\pi/2$ なので，$0\leqq\pi/2-\alpha<\pi/2$ であり，$\sin\{(\pi/2-\alpha)+\alpha\}=\sin(\pi/2)=1$。よって，$f(x)$ は $x=\pi/2-\alpha$ のとき次の最大値をとる。

$$f(\frac{\pi}{2}-\alpha)=a^2+b^2+1+2\sqrt{a^2+b^2}$$

- $a<0$ の場合，(A) より $\pi/2<\alpha<\pi$ なので，$\pi/2<x+\alpha<3\pi/2$ をとり得る。この範囲において $\sin(x+\alpha)$ は単調減少なので，$f(x)$ は $x=0$ のとき次の最大値をとる。

$$f(0)=a^2+b^2+1+2\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha=a^2+b^2+1+2b$$

(3) 単位円を考えることにより，任意の $0<\alpha<\pi$ に対して，$\sin(x+\alpha)$ は $0\leqq x\leqq\pi/2$ の範囲において $\sin\alpha$ または，$\sin(\pi/2+\alpha)$ において最小値をとることがわかる。したがって，$\sin\alpha$ と $\sin(\pi/2+\alpha)$ の大小関係について場合分けを行う。特に，$\sin(\pi/2+\alpha)=\cos\alpha$ なので，(A) より，a,b の大小関係について場合分けすればよい。

- $a\geqq b$ の場合，(A) より $0<\alpha\leqq\pi/4$ であり，$\sin\alpha\leqq\sin(\pi/2+\alpha)$。よって，$f(x)$ は $x=0$ のとき次の最小値をとる。

$$f(0)=a^2+b^2+1+2\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha=a^2+b^2+1+2b$$

- $a<b$ の場合，(A) より $\pi/4<\alpha<\pi$ であり，$\sin(\pi/2+\alpha)<\sin\alpha$。よって，$f(x)$ は $x=\pi/2$ のとき次の最小値をとる。

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{2})&=a^2+b^2+1+2\sqrt{a^2+b^2}\sin(\pi/2+\alpha) \\ &=a^2+b^2+1+2\sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha \\ &=a^2+b^2+1+2a \end{aligned}$$

第４問 得　点	