〔2024Ａ〕

数　　学

（数Ⅰ・数Ⅱ・数Ａ・数Ｂ）

（注意事項）

1. 解答開始の指示があるまで問題冊子を開いてはいけません。
2. 問題冊子と解答用紙は別になっています。
3. 解答用紙の各ページの所定欄に受験番号，氏名を記入しなさい。
4. 計算等が必要な場合は問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 試験終了後は問題冊子を持ち帰りなさい。

数学

第 1 問

以下の問に答えよ。

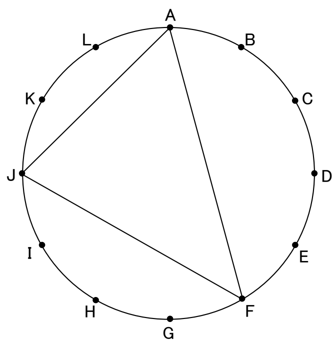
(1) 3 次方程式 $x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$ について，$x = 2$ が解であることを示せ。また，$x = 2$ の他には実数解をもたないことを示せ。

(2) 2 点 A(1，1)，B(3，5) について，条件 AP=BP を満たす点 P の軌跡を求めよ。また，その軌跡と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) 点 C(6，3) を通り，円 $x^2 + y^2 = 9$ に接する直線の方程式を求めよ。

第 2 問

下の図に示すように，円周上に異なる 12 個の点が等間隔に並んでいるとする。それらの点から複数個を選び，アルファベット順に点を結んで多角形を作成する。このとき以下の組み合わせの総数をそれぞれ求めよ。ただし，作成した多角形同士が同じ形状だったとしても異なる点から構成されるときは異なる組み合わせと考える。



(1) 三角形を構成する点の組み合わせ。

(2) 二等辺三角形を構成する点の組み合わせ。ただし，正三角形は除くものとする。

(3) 直角三角形を構成する点の組み合わせ。

(4) 正多角形を構成する点の組み合わせ。

数学

第 3 問

四面体 OABC を考える。$\angle\mathrm{BOA} = \theta_1$，$\angle\mathrm{COA} = \theta_2$ とする。辺 OA，OB，OC それぞれの長さを a，b，c とする。頂点 B から直線 OA に垂直な直線を引き，その直線と直線 OA との交点を D とする。同様に，頂点 C から直線 OA に垂直な直線を引き，その直線と直線 OA との交点を E とする。線分 OD の長さを d，線分 OE の長さを e とする。$\angle\mathrm{BOA}$ と $\angle\mathrm{COA}$ は鋭角であるとき，以下の問に答えよ。

(1) d を b，θ_1 を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を a，b，c，θ_1，θ_2 を用いて表せ。

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が垂直ならば，$d = e$ であることを示せ。

第 4 問

(1) 以下の数式について，$x > 0$ の 範囲で，x が増えるにつれて式の値がどうなるか，A 増える，B 減る，C それ以外 (増えたり減ったりする，一定値をとるなど) のいずれかを A,B,C の中から一つ選び，記号で答えよ (ただし，同じ記号を繰り返し選んでもよい)。また，理由も簡潔に示すこと。

（ア） $\dfrac{1}{x+1}$

（イ） $x^2 - 2x + 5$

（ウ） $\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

(2) n が正の整数のとき，$\sqrt{n}$ の値について以下の問に答えよ。

（ア） $\sqrt{n}$ が整数となる最小の n を求めよ。

（イ） $\sqrt{n}$ が無理数となる最小の n を求めよ。

（ウ） $\sqrt{n}$ が整数でも無理数でもない数になる n があれば，最小のものを求めよ。存在しない場合はその理由を簡潔に示すこと。